Fonction usuelles

cours MIP 1

Soumia CHAIRA

F.S.T. Mohammedia Université Hassan II

11th March 2010

Proposition

Soit f une application définie sur un intervalle I et à valeurs dans J.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est bijective et admet une bijection réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ dans I possédant les propriétés suivantes :

1. *f^{-1} est strictement monotone sur J et admet le même sens de monotonie que f ;*
2. *f^{-1} est continue sur J.*

Remarque

Dans un repère orthonormé, les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$).

Dérivabilité de f^{-1}

Proposition

Soient I et J deux intervalles ouverts et f une bijection de I dans $J = f(I)$.

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ de dérivée non nulle, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Fonction logarithme néperien

Définition

On appelle fonction logarithme néperien, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbf{R}^{+*}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

FIG : Représentation graphique du logarithme néperien.

Propriétés de la fonction logarithme

Proposition

- *L'application* ln *est définie sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$ *par* $\forall x > 0, \ln' x = \dfrac{1}{x}$ *et* $\ln 1 = 0$.
- *L'application est strictement croissante et dérivable sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$.
- *Pour* $x > 0$ *et* $y > 0$, *on a :*
  1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
  2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$;
  3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
  4. $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$, *pour tout* $\alpha \in \mathcal{Q}$.

Limites usuelles de la fonction logarithme

Proposition

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty, & \lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty, & \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+, & \lim\limits_{0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, & \lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall \alpha > 0, \beta > 0, & \lim\limits_{0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0, & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$$

REMARQUES

- Si x et y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbf{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{R}^*$.

  On appelle dérivée logarithmique de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.

Fonction logarithme de base a

Définition

Pour $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on appelle fonction logarithme de base a l'application

$$\log_a : x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

Fonction exponentielle

Définition

On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est bijective de $\mathbf{R}^{*+}$ sur $\mathbf{R}$.

La bijection réciproque est appelée fonction exponentielle et est notée $x \mapsto \exp(x)$.

Dérivée de la fonction exponentielle

Proposition

- *L'application* $x \mapsto \exp(x)$ *est une bijection de* $\boldsymbol{R}$ *sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$, *continue et strictement croissante.*

  On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

- *La fonction* $x \mapsto \exp(x)$ *est dérivable sur* $\boldsymbol{R}$ *et*

$$\forall x \in \boldsymbol{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$$

Plus généralement, elle est indéfiniment dérivable sur $\boldsymbol{R}$ *et*

$$\forall n \in \boldsymbol{N},\ \exp^{(n)} = \exp$$

FIG : Représentation graphique de la fonction exponentielle.

Propriétés de la fonction exponentielle

Proposition

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
3. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
4. $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^{\alpha}$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Limites usuelles

Proposition

$$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \exp(x) = 0^+, & \lim\limits_{+\infty} \exp(x) = +\infty, & \lim\limits_{-\infty} x\exp(x) = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty, & \lim\limits_{0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1, & \\ \forall \alpha > 0, \beta > 0, & \lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta(x) = 0, & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^\beta(x)}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$$

Fonction exponentielle de base a

Définition

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

L'application $x \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.

Propriétés des fonctions exponentielle de base a

Proposition

- *Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est*

$$\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$$

- *Elle est dérivable : $\forall x \in \boldsymbol{R},\ (a^x)' = (\ln a)\, a^x$.*

Limites usuelles de la fonction exponentielle de base a

Proposition

$$\lim_{-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{+\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Propriétés fonctionnelles des fonctions exponentielles de base a

Proposition

Pour tous x, y de $\mathbf{R}$, pour tous a, b de $\mathbf{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \end{cases}$$

FIG : Courbes représentatives de différentes fonctions exponentielles de base *a*.

Fonction puissance d'exposant α

Définition

Soit α un nombre réel quelconque.

On appelle fonction puissance d'exposant α l'application définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}$.

Propriétés des fonctions puissances

Proposition

- *La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.*
- *Sur son domaine $\mathbf{R}^{+*}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est*

$$\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante égale à 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$$

- *Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbf{R}^{+*}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$.*

Limites usuelles de la fonction puissance

Proposition

- $$\lim_{+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ +\infty & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{0} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0 & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Autres limites

Proposition

$$\begin{cases} \forall \alpha > 0, \forall a > 1 & \lim\limits_{-\infty} |x|^{\alpha} a^{x} = 0, \quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{a^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty \\ \forall \alpha > 0, \forall a \in]0,1[& \lim\limits_{-\infty} \dfrac{a^{x}}{|x|^{\alpha}} = +\infty, \quad \lim\limits_{+\infty} x^{\alpha} a^{x} = 0 \end{cases}$$

Le placement des différentes courbes de la fonction puissance est le suivant :
$\forall x > 0, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2,$ avec $\alpha < \beta$:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$$

FIG : Courbes représentatives de différentes fonctions puissances d'exposant α.

Fonctions hyperboliques

Définition

On appelle sinus hyperbolique l'application définie par :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

On appelle cosinus hyperbolique l'application définie par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

On appelle tagente hyperbolique l'application définie par :

$$th(x) = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

Proposition

- *La fonction sinus hyperbolique est une application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$ *continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *de dérivée la fonction cosinus hyperbolique.*
- *La fonction cosinus hyperbolique est une application de* $\mathbf{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *continue, paire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *de dérivée la fonction sinus hyperbolique.*
- *La fonction tangente hyperbolique est une application de* $\mathbf{R}$ *dans* $]-1, 1[$ *continue, impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *de dérivée l'application* $x \mapsto 1 - th^2x$ *et on a la relation*

$$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$$

FIG :Représentation de cosinus et sinus hyperboliques.

FIG : Représentation de la fonction tangente hyperbolique.

Trigonométrie hyperbolique

Proposition

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a les relations suivantes :

- *Formules issues des définitions :*
  1. $chx + shx = e^x$;
  2. $chx - shx = e^{-x}$;
  3. $ch^2x - sh^2x = 1$.

- *Formules de sommation pour ch :*
  1. $ch(x + y) = chx\, chy + shx\, shy$;
  2. $ch(2x) = 2ch^2x - 1 = 1 + 2sh^2x$;
  3. $ch(x - y) = chx\, chy - shx\, shy$.

Trigonométrie hyperbolique (suite)

Proposition

- *Formules de sommation pour sh :*
  1. $sh(x+y) = shx\,chy + chx\,shy$;
  2. $sh(2x) = 2shx\,chx$;
  3. $sh(x-y) = shx\,chy - chx\,shy$.
- *Formules de sommation pour th :*
  1. $th(x+y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thx\,thy}$;
  2. $th(2x) = \dfrac{2thx}{1 + th^2x}$;
  3. $th(x-y) = \dfrac{thx - thy}{1 - thx\,thy}$.

Changement de variables

Proposition

- *Changement de variables* $t = th(\frac{x}{2})$ *:*

$$chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}; \quad shx = \frac{2t}{1-t^2}; \quad thx = \frac{2t}{1+t^2}.$$

- *Changement de variables* $u = e^x$ *:*

$$chx = \frac{u^2+1}{2u}; \quad shx = \frac{u^2-1}{2u}; \quad thx = \frac{u^2-1}{u^2+1}.$$

Formules de linéarisation

Proposition

- *Linéarisation :*

  On écrit $ch^n x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n$ *et* $sh^n x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$.

  On développe (formule du binôme), on groupe les termes équidistants des extrémités, et on réutilise les définitions pour retrouver des $ch(px)$ *et/ou* $sh(px)$.

Exemple

$$\begin{cases} sh^4x &= \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4 \\ &= \dfrac{1}{16}(e^{4x} - 4e^{2x} + 6 - 4e^{-2x} + e^{-4x}) \\ &= \dfrac{1}{8}(ch(4x) - 4ch(2x) + 3) \end{cases}$$

Formules de linéarisation

Proposition

- *Opération inverse de linéarisation :*

  $\forall x \in \boldsymbol{R}, \forall n \in \boldsymbol{N}, (chx + shx)^n = (e^x)^n = e^{nx} = ch(nx) + sh(nx)$

  On peut ainsi exprimer $ch(nx)$, $sh(nx)$ en fonction de puissances de chx et/ou shx.

  Pour cela on développe $(chx + shx)^n$ par la formule du binôme.

  La partie paire (rep. impaire) du résultat est alors égale à $ch(nx)$ (resp. $sh(nx)$).

Exemple

$$(chx+shx)^4 = ch^4x+4ch^3xshx+6ch^2xsh^2x+4chxsh^4x+sh^4x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ch4x = ch^4x + 6ch^2x\, sh^2x + sh^4x \\ sh4x = 4ch^3x\, shx + 4chx\, sh^3x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ch4x = ch^4x + 6ch^2x(ch^2x-1) + (ch^2x-1)^2 \\ sh4x = 4chx((1+sh^2x)shx + sh^3x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ch4x = 8ch^4x - 8ch^2x + 1 \\ sh4x = 4chx(2sh^3x + shx) \end{cases}$$

La fonction arc-sinus

Définition

La restriction à $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de $x \mapsto \sin x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin x$ (fonction "arc sinus").

Propriétés de la fonction arc-sinus

Proposition

- *La fonction arc-sinus est continue, strictement croissante, et impaire sur* $[-1,1]$ *et à valeurs dans* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
- $$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
- *Pour tout* x *de* $[-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
- *Pour tout* x *de* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$. *(attention au domaine !)*
- *Pour tout* x *de* $[-1,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
- *Pour tout* x *de* $]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

FIG : Représentation des fonctions sinus et arc-sinus.

ATTENTION : On a $\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On se gardera de faire des simplifications trop rapides.

Si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on utilise la périodicité de sinus. Par exemple,

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Dérivée de la fonction arc-sinus

Proposition

Pour tout x de $]-1,1[$, $\quad \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arc-cosinus

Définition

La restriction à $I = [0, \pi]$ de $x \mapsto \cos x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos x$ (fonction "arc cosinus").

Propriétés de la fonction arc-cosinus

Proposition

- *La fonction arc-cosinus est continue et strictement décroissante sur* $[-1,1]$ *et à valeurs dans* $[0,\pi]$.
- $$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$
- *Pour tout* x *de* $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.
- *Pour tout* x *de* $[0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$. *(attention au domaine !)*
- *Pour tout* x *de* $[-1,1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
- *Pour tout* x *de* $]-1,0[\cup]0,1[$, $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

FIG : Représentation des fonctions cosinus et arc-cosinus.

Dérivée de la fonction arc-cosinus

Proposition

Pour tout x de $]-1,1[$, $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Autres Propriétés

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$ *on a :*

$$\arccos(-x) + \arccos x = \pi.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arc-tangente

Définition

La restriction à $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $x \mapsto \tan x$ est une bijection de I sur $\mathbf{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan x$ (fonction "arc tangante").

Propriétés de la fonction arc-tangente

Proposition

- *La fonction arc-tangente est continue, strictement croissante, et impaire sur* $\boldsymbol{R}$ *et à valeurs dans* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
- $\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$
- *Pour tout* x *de* $\boldsymbol{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
- *Pour tout* x *de* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$. *(attention au domaine !)*
- *Pour tout* x *de* $\boldsymbol{R}$, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- *Pour tout* x *de* $\boldsymbol{R}$, $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

FIG : Représentation des fonctions tangente et arc-tangente.

Dérivée de la fonction arc-tangente

Proposition

Pour tout x de $\mathbf{R}$, $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Autres propriétés de la fonction arc-tangente

Proposition

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ *on a :*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

avec

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}.$$

La fonction argsh

Définition

L'application $x \mapsto shx$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto argshx$ (fonction "argument sh").

Propriétés de la fonction argument sh

Proposition

- *La fonction argsh est continue, strictement croissante, et impaire sur* $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$.
- *Pour tous* x, y *réels :*

$$y = shx \Leftrightarrow x = argshy\,.$$

- *Pour tout* x *de* $\mathbf{R}$

$$sh(argshx) = x,\ argsh(shx) = x,\ ch(argshx) = \sqrt{1+x^2}.$$

FIG : Représentation des fonctions sh et argument sh.

Dérivée et expression en fonction du logarithme de argsh

Proposition

Pour tout x de $\mathbf{R}$,

- $argsh'x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
- $argshx = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch

Définition

L'application $x \mapsto chx$ est une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto argchx$ (fonction "argument ch").

Propriétés de la fonction argument ch

Proposition

- *La fonction argch est continue, strictement croissante sur* $[1, +\infty[$ *et à valeurs dans* $\boldsymbol{R}^+$.
- *On a l'équivalence :*

$$(y = chx, x \geq 0) \Leftrightarrow (x = argshy, y \geq 1).$$

- *Pour tout* $x \geq 0$, $argch(chx) = x$;

  Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, $argch(chx) = |x|$;

  Pour tout $x \geq 1$, $ch(argchx) = x$ *et* $sh(argchx) = \sqrt{x^2 - 1}$.

FIG : Représentation des fonctions ch et argument ch.

Dérivée et expression en fonction du logarithme de argch

Proposition

- *Pour tout* $x > 1$, $\quad argch'x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- *Pour tout* $x \geq 1$, $\quad argchx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth

Définition

L'application $x \mapsto thx$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto argthx$ (fonction "argument th").

Propriétés de la fonction argument th

Proposition

- *La fonction argth est continue, strictement croissante, et impaire sur* $]-1,1[$ *et à valeurs dans* $\boldsymbol{R}$.
- *On a l'équivalence :*

$$(y = thx,\ x \in \boldsymbol{R}) \Leftrightarrow (x = argthy,\ -1 < y < 1).$$

- *Pour tout* x *de* $\boldsymbol{R}$, $\quad argth(thx) = x$;

  Pour tout x *de* $]-1,1[$, $\quad th(argthx) = x$;

$$ch(argthx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad sh(argthx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

FIG : Représentation des fonctions th et argument th.

Dérivée et expression en fonction du logarithme de argth

Proposition

Pour tout x de $]-1,1[$,

- $argth'x = \dfrac{1}{1-x^2}$;
- $argthx = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.